Theoretische Untersuchungen zu einfachen neuronalen Netzen

Günther Palm
Department of Natural Information Processing, University of Ulm, 89069 Ulm, Germany
EMail: guenther.palm@uni-ulm.de

Hans-Joachim Bentz
Imbit.net GmbH, 31134 Hildesheim, Germany
EMail: h.bentz@imbit.net

2021-02-02

Zusammenfassung

Neuronale Netze sind Gegenstand der theoretischen Neurowissenschaft, werden aber auch als 'künstliche' neuronale Netze in der Technik untersucht und praktisch eingesetzt. Dies führt zu einer Vielzahl verschiedener theoretischer Zugänge zu neuronalen Netzen aus verschiedenen Disziplinen, über die wir hier einen Überblick geben.

Neuronale Netze sind zuerst als vereinfachte Modelle zur Simulation der Informationsverarbeitung im Gehirn eingesetzt worden. Seit den 50er und 60er Jahren beschreibt man den "Fluss" der neuronalen Erregung durch Differentialgleichungen. Man kann Neuronengleichungen für die Aktivierung von N Neuronen im Gehirn und Synapsengleichungen für die Synapsenstärken von $S < N^2$ Synapsen unterscheiden (Caianiello 1961). Wir beschränken uns hier auf die Neuronengleichungen, wobei der Zustand eines Neurons durch eine kleine Anzahl k von Zustandsvariablen beschrieben wird. Damit erhalten wir ein dynamisches System auf einem $k \cdot N$-dimensionalen Zustandsraum.

Bereits damals in den 60er Jahren war klar, daß diese Differentialgleichungen beliebig komplizierte Lösungen generieren können und man praktisch keine generellen allgemeingültigen Ergebnisse von einer rein mathematischen Theorie solcher Gleichungssysteme erwarten kann. Man suchte also nach weiteren Vereinfachungen. Auf der anderen Seite haben sich natürlich die Neurowissenschaften in den letzten 60 Jahren wesentlich weiter entwickelt, womit die biophysikalische und damit auch die mathematische Modellierung von Neuronen und Gehirnstrukturen heute mit deutlich mehr potentiellen Mechanismen und Strukturen rechnen muß, wobei die grundlegenden Neuronengleichungen ähnlich geblieben sind, allerdings aber wesentlich mehr Details berücksicht werden müssen und damit auch mehr Parameter experimentell bestimmt werden müssen. Die praktische Alternative zur Theorie ist natürlich die Simulation neuronaler Netze, womit auch bereits in den 60er Jahren begonnen wurde. Damals war das Problem vor allem, daß keine ausreichende Rechenleistung zur Verfügung stand, um auch nur annähernd Netze von der Größe eines kleinen Gehirns zu simulieren; heute hätten wir gerade genug Rechenleistung, wir stehen jetzt aber vor dem Problem, daß vor einer sinnvollen Simulation eines ganzen Gehirns viel zu viele Parameter experimentell zu bestimmen oder ad hoc festzulegen wären.

Wir beschränken uns hier auf die theoretischen Untersuchungen und die hierfür notwendigen weiteren Vereinfachungen. Diese betreffen die Diskretisierung der Zeit und die Binarisierung des neuronalen Ausgangssignals das häufig als sogenannter "Spike" beschrieben wird. Dies führt zu spikenden Neuronenmodellen (Gerstner and Kistler 2002) und im extrem einfachen Fall zu den einfachen Schwellenneuronen oder "Neurographen" (Palm 1981), in denen die feste Kopplungsmatrix C der Verbindungen zwischen den Neuronen durch einen gerichteten Graphen dargestellt wird und es normalerweise nur eine Zustandsvariable pro Neuron gibt (manchmal zwei).

Das einfachste Modell schreibt sich dann so:

(1) $\tau \cdot x_i = -x_i + (Cy)_i$ mit $y_i = f(x_i)$,$(i = 1, .., N)$

Hierbei ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine sigmoide Funktion, etwa die 'Fermifunktion'
$f(x) = (1 + e^{-\beta x})^{-1}$.
Bei dem spikenden 'leaky integrate and fire' Modell (dem wohl populärsten Modell für spikende Neurone) gilt diese Gleichung nur für $x_i < \Theta$. Wenn x_i den Wert Θ (die "Feuerschwelle") erreicht, wird x_i auf einen "Reset"-Wert σ mit $0 < \sigma < \Theta$ zurückgesetzt und der Output des Neurons ist $y_i = 1$, sonst ist er $= 0$.

Diese Modelle kann man in diskreter Zeit simulieren und man erhält Rekursionsgleichungen der Art

(2) $x_i(t + 1) = (Cy(t))_i$ mit $y_i(t) = f(x_i(t))$.

Bei binären oder spikenden Neuronen ist $f(x) \in \{0, 1\}$, also kann man schreiben

(3) $x_i(t + 1) = (Cy(t))_i$ mit $y_i(t) = 1_{[x_i(t) \geq 0]}$

Dies nennen wir das einfache Schwellenneuronenmodell oder auch den "Neurographen" wenn z.B. auch noch die Kopplungsmatrix C binär ist oder $C_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$.

Diese einfachen Neuronenmodelle sind Gegenstand mehrerer ganz verschiedener theoretischer Untersuchungsmethoden.

1. Sie sind dynamische Systeme (in diskreter oder kontinuierlicher Zeit) also Gegenstand der Theorie dynamischer Systeme.

2. In der Technik (zum Beispiel im Bereich der Mustererkennung) werden solche Systeme eingesetzt als "künstliche Neuronale Netze". Hier geht es um Konstruktionsmethoden für solche Netze zur Erfüllung bestimmter Zwecke. Dies ist Gegenstand der Informatik, insbesondere Berechenbarkeitstheorie, Komplexitätstheorie, logische Schaltungen, Automatentheorie.

3. In der Physik beschreibt die Kopplungsmatrix C die Wechselwirkung zwischen (magnetischen) "Spins" in sogenannten "Spin-Gläsern" (Amit et al. 1985). Im Normalfall ist die Matrix C dann symmetrisch. Diese Ideen wurden in den 90er Jahren auch auf die Neurowissenschaften übertragen, vor allem in sogenannten 'Attraktornetzen' (Amit 1989).

4. Die Assoziativspeicher kann man als besonders einfache neuronale Netze ansehen, bei denen die Kopplungsmatrix durch Korrelationslernen entsteht. Sie wurden in den 70er bis 90er Jahren unabhängig von Physikern und Technikern untersucht.

5. Die Konstruktion vorgegebener Funktionen durch künstliche neuronale Netze wird auch in der Approximationstheorie untersucht, wo die neuronalen Netze eine interessante Alternative zur klassischen Approximation durch Polynome darstellen.

6. Die Matrix C kann oft auch durch einen Graphen oder einen gerichteten Graphen beschrieben werden und die Aktivitätsausbreitung auf den Knoten dieses Graphen spiegelt dann graphentheoretische Eigenschaften wieder.

7. Wenn die "sigmoide" Funktion f relativ flach verläuft, oder wenn etwa

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

oder

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

kann man die Dynamik vereinfacht als linearisiert betrachten und erhält lineare Differential- oder Differenzengleichungen. Dies liefert einen Bezug zu Spektraleigenschaften der Matrix C.

In der aktuellen Diskussion sollte man vielleicht auch die "künstliche Intelligenz" oder besser maschinelles Lernen, speziell mit "tiefen" neuronalen Netzen (Goodfellow 2016), erwähnen. Dieser Bereich befasst sich mit Lernverfahren zur Veränderung der Kopplungsmatrix C, wobei man zwischen "überwachten" und "unüberwachten" Lernverfahren unterscheiden muss. Gerade die tiefen neuronalen Netze (typischerweise ohne Rückkopplungen und mit vielen neuronalen "Zwischenschichten" zwischen der Eingabe und der gewünschten Ausgabe) sind allerdings bisher theoretisch noch nicht gut verstanden. Als theoretischer Ansatz ist hier vor allem die statistische Lerntheorie (Vapnik 1998) zu nennen, in der vor allem die Generalisierungsfähigkeit (über die gelernte Input-Output-Paare hinaus) untersucht wird. Bei den von uns eingesetzten Assoziativspeichern (Palm 1987, 2013) handelt es sich um besonders einfache Verfahren des Korrelationslernens. Das Lernen ist aber nicht primär Gegenstand dieser Literaturübersicht.

Wir werden jetzt der Reihe nach die wesentlichen Resultate aus den verschiedenen Bereichen betrachten.

1. Die Theorie dynamischer Systeme befasst sich mit Systemen von Differentialgleichungen (auch mit Differenzengleichungen) in hochdimensionalen Zustandsräumen. Dabei geht es primär um das asymptotische Langzeitverhalten, also die Struktur der Attraktoren (Fixpunkte, geschlossene Bahnen, aber auch chaotische Attraktoren). Hier gibt es zunächst keine prinzipiellen Einschränkungen der Dynamik unserer Gleichungen, d.h. alles ist möglich, abhängig von der Kopplungsmatrix C (Dayan and Abbott 2001). Speziell gibt es Untersuchungen zum Auftreten von Chaos in einfachen neuronalen Netzen (Helias and Dahmen 2020). Aus der Physik (Hopfield 1982) weiß man, dass dies für symmetrische Matrizen C nicht möglich ist, dass sogar in der diskreten Version alle Attraktoren Fixpunkte oder Bahnen der Länge 2 sind (auch "Blinker" genannt). Weiterhin gibt es auch Stabilitätsuntersuchungen (Olafsson 1996), die allerdings für spikende Modelle deutlich schwieriger sind.

   Das kurzzeitige Verhalten wird zumeist in etwas komplexeren Modellen untersucht. Hier kommen zu der Nichtlinearität potentiell noch zwei weitere Komplikationen hinzu, nämlich Delays der Signalübertragung zwischen Neuronen und/oder additive stochastische Beiträge zu den Variablen x_i, also stochastische Differentialgleichungen (z.B. Holden 1976). Hier kann man dann die zeitliche Entwicklung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder von Populationsmittelwerten untersuchen. Dabei kann bereits die Untersuchung eines LIF-Neurons mit stochastischem Input mathematisch interessant sein (z.B. die "first passage time").

2. Bei den künstlichen Neuronalen Netzen geht es eher um konstruktive Fragestellungen: wie und mit welchem Aufwand kann man ein Netz konstruieren, das eine vorgegebene Input-Output-Funktion realisiert, oder dasselbe für ganze Eingabe- und Ausgabesequenzen erreicht. Die einfachste und wohl am gründlichsten untersuchte Fragestellung dieser Art betrifft Bool'sche Funktionen, also Abbildungen $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Aus der Logik weiß man, dass man jede solche Funktion relativ einfach mit "und", "oder" und "nicht" Gattern realisieren kann und auch mit einfachen Schwellenneuronen. (Palm 1982). In der Theorie der Schaltungskomplexität versucht man den Schaltungsaufwand hierfür zu minimieren, d.h. die Anzahl der Gatter oder Neurone, bzw. Bausteine und die "Schaltungstiefe", d.h. die Anzahl der Gatter, die auf den längsten Pfad in der Schaltung von Input zu Output durchlaufen werden müssen. Hier werden dann polynomielle von nicht polynomiellen Schaltungen unterschieden. Um die Zählung der Gatter zu vereinfachen, werden dabei $\wedge$ und $\vee$-Gatter und auch Schwellenneuronen mit beliebig vielen Einträgen zugelassen. Häufig werden "nicht"-Gatter nicht gezählt. Mit den Vereinfachungen ist klar, dass man mit Netzen aus $\wedge$,$\vee$-Gattern der Tiefe 2 jede bool'sche Funktion darstellen kann (konjunktive bzw. disjunktive Normalform) und dass das auch mit Schwellenneuronen geht. Allerdings geht das nicht immer mit polynomiellem Aufwand. Z.B. die Paritätsfunktion benötigt mit klassischen logischen Gattern exponentiellen Aufwand, mit Schwellenneuronen aber nur linearen. Die

"Skalarprodukt"-Funktion benötigt dann auch mit Schwellenneuronen exponentiellen Aufwand, der dann aber bei Tiefe 3 linear wird, und durch ein einfaches Abzählargument kann man sich klarmachen, dass es für jede Tiefe k Boole'sche Funktionen gibt, die sich nicht in Tiefe k mit polynomiellem Aufwand realisieren lassen. Mit etwas mehr Aufwand kann man sogar zeigen, dass einige davon in Tiefe $k+1$ polynomiell realisierbar sind (Parberry 1994).

Für Klassifikationsprobleme, also für die neuronale Realisierung einer vorgegebenen Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \{0,..,k\}$ gibt es ein paar schöne Resultate, die so formuliert sind, dass die Funktion f nur für endlich viele Eingabevektoren $x \in M$ die richtige Klassifikation liefern muss. Ausserdem betrachtet man zumeist nur 2-Klassen Probleme, also $k = 1$, was aber keine wesentliche Einschränkung darstellt. Für ein Schwellenneuron ist klar, dass es nur "linear trennbare" 2-Klassen Probleme mit einem passenden Gewichtsvektor richtig klassifizieren kann. Durch kombinatorische Analyse konnte Cover (Cover 1965) die Wahrscheinlichkeit p dafür berechnen, dass M zufällig in $\mathbb{R}^n$ gewählte Punkte linear trennbar sind. Für $n < M$ mit $P = 1$ und für $n = \frac{M}{2}$ ist $p = \frac{1}{2}$ Für große M und n steigt p um $\frac{n}{M} = \frac{1}{2}$ herum sehr schnell von nahe 0 nach nahe 1 an. Dies zeigt, dass man mit einem 2-schichtigen Netzwerk mit n Neuronen in der 1. Schicht jedes Klassifikationsproblem mit einem neuronalem Netz mit (in M) linear vielen Neuronen lösen kann. Dies steht übrigens nicht im Widerspruch zu den vorherigen Resultaten für $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, da $M = |\{0,1\}^n| = 2^n$ ist.

All diese Resultate beschäftigen sich nur mit der Realisierbarkeit der Funktion f, zeigen also die Existenz eines passenden neuronalen Netzes. Das Problem, ein solches Netz zu finden, also vor allem die richtigen Gewichte, etwa durch sukzessive Modifikation zu finden, ist allerdings in der Regel sehr schwierig (d.h. NP-vollständig); Resultate dazu findet man z.B. in (Judd, 1988).

Bei der Realisierung von Input-Output Sequenzen beliebiger Länge betrachtet man typischerweise rückgekoppelte neuronale Netze zur Realisierung sogenannter endlicher Automaten. Endliche Automaten sind seit den 50er Jahren Gegenstand der Automatentheorie und es ist klar, dass ein endlicher Automat mit $M \leq 2^n$ Zuständen durch eine Boole'sche funktion $f\colon \{0,1\}^{n+d} \to \{0,1\}^{n+d}$ plus zeitverzögerte Rückkopplung dargestellt werden kann. Umgekehrt ist jedes Schwellenneuron ein einfacher endlicher Automat und damit auch jedes endliche Netz aus solchen Neuronen. Diese Äquivalenz von künstlichen neuronalen Netzen und endlichen Automaten wurde zuerst von Kleene (Kleene 1956) beobachtet und seither verschiedentlich wiederentdeckt. Gibt man einen endlichem Automaten ein unbeschränkt erweiterbares endliches Gedächtnis, erhält man eine Turingmaschine. Aus dieser Beobachtung ergeben sich viele neuere Überlegungen zur Turing- oder Super-Turing-Mächtigkeit neuronaler Netze (Siegelmann 1999). Ein wichtiger Punkt dabei ist die Verwendung reeller Zahlen (beispielsweise in den neuronalen Gewichten oder den dendritischen Potentialen) zur Speicherung unbeschränkt vieler (oder gar unendlich vieler) Bits.

3. In der Physik betrachtet man neuronale Netze als Spin-Systeme (Amit et al. 1985), d.h. man untersucht (zumeist) rückgekoppelte Netze aus Schwellenneuronen. Traditionell werden 3 Arten von Dynamik unterschieden: Paralleles update: d.h. Gleichung (3), Serielles update: Gleichung (3) wird in fester oder zufälliger Reihenfolge jeweils nur für ein Neuron ausgeführt, Zufälliges update (zumeist auch seriell durchgeführt, ginge aber auch parallel): für jedes Neuron wird aus dem dendritischen Potential $x_i(t)$ mit Hilfe der Fermifunktion die Wahrscheinlichkeit bestimmt, mit der das Neuron auf 1 schaltet. Die Kopplungsmatrix C spiegelt physikalische Annahmen über das Spin-System wider.

   Für Spin-Gläser ist C eine beliebige (oder spärliche oder zufällige) symmetrische $n \times n$ Matrix, meistens mit Diagonale 0. Für Spin-Gitter ist $C \in \mathbb{R}^{G*G}$, wobei $G \leq \mathbb{R}^d$ ein d-dimensionales endliches oder periodisches Gitter ist. Die bekanntesten Resultate zur Dynamik gibt es für niedrigdimensionale Gitter ($d = 1,2,3$); weiterführende Ansätze beruhen hier auf der Idee der 'Renormalisierung' (Amit 1984).

   Die wichtigsten Resultate für Spin-Gläser sind:

- Hopfields Energiefunktion $H(x) = -\frac{1}{2}x^T Cx$ und damit: alle Attraktoren sind lokale Energieminima und damit Fixpunkte (für die sequentielle Dynamik) (Hopfield 1982).
- Für die parallele Dynamik sind Attraktoren entweder Fixpunkte oder 2er-Zyklen ("Blinker").
- die zufällige Dynamik wird für sog. "Annealing Schedules" verwendet, mit denen man mit großer Wahrscheinlichkeit ein globales Energieminimum findet.
- Die Bahnen zu den Attraktoren können sehr lang sein (allerdings für speziell konstruierte Netze).
- für Hopfield-Netze (die Physiker-Variante der Assoziativspeicher) gibt es viele Resultate zur Anzahl der stabilen Fixpunkte etc. (umfangreiche Literatur, teilweise Übersicht z.B. in Palm 2013).

All dies gilt nur für symmetrische Matrizen C. Für asymmetrische Matrizen gibt es weit weniger Resultate (siehe z.B. in Helias and Dahmen 2020), am ehesten noch für zufällige spärliche nicht notwendig symmetrische Matrizen. Hier wird häufig eine chaotische Dynamik (sehr lange Bahnen bzw. Zyklen) festgestellt (Sompolinsky et al. 1988; van Vreeswijk and Sompolinsky 1996).

4. Die Idee des Assoziativspeichers geht wohl auf Steinbuch (Steinbuch 1996) zurück. Die erste genauere mathematische Untersuchung von Willshaw (Willshaw et al. 1969) bezieht sich auch auf holographische Systeme neben neuronalen Netzen. In den 80er Jahren wurden vermehrt neuronale Assoziativspeicher untersucht, zuerst von Palm (Palm 1980), später auch im Hinblick auf technische Realisierungen (siehe Palm 2013) und in der Physik basierend auf den Modellen von Willshaw (Willshaw et al. 1969) und Hopfield (Hopfield 1982). Die wesentlichen Ideen und Resultate beziehen sich auf die Einfachheit und Lokalität der synaptischen Lernregel (siehe Palm 1982) und die große Speicherkapazität von einfachen Netzen mit binären Neuronen und Synapsen, die aber nur für spärliche Aktivitätsmuster erreicht werden kann (Palm 1987; Tsodyks and Feigelman 1988).

   Einige spezielle Anwendungen von binären Assoziativspeichern wurden von Bentz et al. untersucht und implementiert (Bentz and Kötter 1990; Hagström 1996; Dierks 2005; Bentz 2006a,b; Rosenschein 2012). Notorisch schwierig ist bei solchen Anwendungen das Finden geeigneter binärer Repräsentanten (Codierungen) für die realen Daten. Es zeigte sich, dass eine (generische) Modifikation der Ausgangscodierung ein anderes Maximum des Informationsgehaltes hervorbringt und den Einsatz für praktische Zwecke, meist Datenbankzugriffe, ermöglicht. (Bentz et al. 1989). Das Speichern von Vektor-Sequenzen kann sogar zum Speichern von "Programmen" genutzt werden. So bildet eine geeignete Zusammenschaltung mehrerer Speichermatrizen ein neuronales Netz, das programmierbar wird. Es wurde gezeigt, dass dieses Netz sämtliche Aufgaben erledigen kann, die herkömmlich von einem von Neumann-Computer bewältigt werden (Bentz and Dierks 2013). Wenn die binäre Speichermatrix C zufällig mit 1en befüllt wird, dann führen geeignete Reduktionsvorschriften im Ausgangsvektor zu binären Sequenzblöcken, die pseudozufällige Eigenschaften haben. Es wurden verschiedene Befüllungsmethoden untersucht, wobei Matrizen mit gleicher Dichte in den Spalten (vornehmlich 50%) günstige kryptografische Eigenschaften zeigten (Dierks et al. 2021). Zur Beschleunigung der Prozesse wurde die Option der parallelen Abarbeitung von Matrixoperationen mittels eines FPGA auch als Hardware realisiert (Dierks 2019).

5. Betrachtet man neuronale Netze zur Realisierung beispielsweise stetiger Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei gewöhnlich der Definitionsbereich $K \subset \mathbb{R}^n$ von f als unendlich, aber kompakt vorausgesetzt wird, dann befindet man sich im Bereich der Approximationstheorie. Normalerweise untersucht man hier Approximation von Funktionen durch Polynome, wobei der Grad des Polynoms ein natürliches Maß für die Komplexität ist. Hier kann man nun wieder, wie bei den Schaltungen, mehrschichtige, vorwärtsgerichtete Netze betrachten (sogenannte multilayer perceptrons, MLPs).

Wie in der Logik stellte sich auch hier zunächst die Frage, ob man mit 2-schichtigen Netzen (mit zunehmender Anzahl k von Neuronen in der ersten Schicht und einem Ausgabeneuron jede stetige Funktion realisieren kann (ein ähnliches Problem wurde bereits von Kolmogorov behandelt, siehe auch Palm (Palm 1979)). Die positive Antwort wurde 1989 bewiesen (Cybenko 1989). Die weit schwierigere Frage, wie man solche approximierenden Netze finden oder erlernen kann, wurde dann in den 90er und 2000er Jahren ausführlich diskutiert (z.B. von Vapnik 1998).

6. Die Deutung der Kopplungsmatrix als (i.a. gewichteter) Graph und die dadurch erzeugte Erregungsausbreitung auf den Knoten des Graphen (siehe 'Neurograph') wurde gelegentlich untersucht. Man kann hier Bezüge zwischen graphentheoretischen Eigenschaften (Zusammhangskomponenten, maximale Weglängen, Cliquen,...) und entsprechenden Eigenschaften der Neurograph-Dynamik herstellen. Insbesondere gibt es ein paar Ansätze, sog. "Cell Assemblies" graphentheoretisch (als Verallgemeinerung von Cliquen) zu definieren und zu untersuchen (basierend auf Palm 1981). Außerdem gibt es einige praktische Anwendungen dieser einfachen Dynamik, insbesondere die Idee, die Nichtumkehrbarkeit der Abbildung von einem Netzwerkzustand zum nächsten kryptographisch zu nutzen (Dierks et al. 2021).

7. Die Untersuchung linearer oder linearisierter Neuronaler Netze (zumeist mit Methoden der linearen Algebra) ist hiervon ein Spezialfall. Auch hier geht es um die Untersuchung von Spektraleigenschaften, vor allem von zufällig generierten Matrizen mit bestimmten Eigenschaften, wie etwa, dass in jeweils einer Spalte der Matrix immer nur Werte ≥ 0 oder ≤ 0 stehen dürfen ("Dale's Law"), oder dass der Mittelwert aller Einträge (oder aller Einträge in jeweils einer Zeile) Null sein soll. Außerdem kann man die Verteilung der zumeist unabhängig generierten Einträge einschränken (Normalverteilung, Gleichverteilung auf einem Intervall, Exponentialverteilung positiver Einträge, Einträge nur aus $\{0, 1\}$ oder $\{-1, 0, 1\}$). Einen Überblick über solche Spektraleigenschaften findet man in (O'Rourke et al. 2016).

In der Gesamtschau dieser umfangreichen Literatur erkennt man, dass man zwar viel über spezielle Typen von neuronalen Netzen sagen kann, deren Untersuchung aus jeweils verschiedenen Kontexten motiviert ist, dass aber im Allgemeinen über die Spezielle Dynamik einfacher Neuronaler Netze, in der sich in jedem Zeitschritt eine lineare globale Wechselwirkung mit vielen lokalen Nichtlinearitäten abwechselt, nichts Einschränkendes gesagt werden kann.

Literatur

Daniel J. Amit. *Field theory, the renormalization group, and critical phenomena.* World Scientific, 1984.

Daniel J. Amit. *Modeling Brain Function: The World of Attractor Neural Networks.* Cambridge University Press, 1989. doi: 10.1017/CBO9780511623257.

Daniel J. Amit, Hanoch Gutfreund, und H. Sompolinsky. *Spin-glass models of neural networks.* Phys. Rev. A, 32:1007–1018, Aug 1985. doi: 10.1103/PhysRevA.32.1007. URL `https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.32.1007`.

Hans-Joachim Bentz. *Suchen und Problemlösen in komplexer Umgebung.* In: Perspectives on Cognition: A Festschrift for Manfred Wettler. Rapp, Reinhard and Sedlmeier, Peter, pages 417–438. Pabst Science Publishers, Lengerich, 2006a.

Hans-Joachim Bentz. *Die Suchmaschine SENTRAX. Grundlagen und Anwendungen dieser Neuentwicklung.* In: Proceedings des Fünften Hildesheimer Evaluierungs- und Retrievalworkshop, 2006b. URL `https://hildok.bsz-bw.de/files/74/519900383.pdf`.

Hans-Joachim Bentz und Andreas Dierks. *Neuromathematik und Assoziativmaschinen.* Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013. ISBN 978-3-642-37937-6.

Hans-Joachim Bentz und Rolf Kötter. *Intelligente Programme - Assoziativspeicher auf UNIX-Systemen.* iX Multiuser-Multitasking-Magazin, 7:80–83, 1990.

Hans-Joachim Bentz, Michael Hagström, und Günther Palm. *Information Storage and Effective Data Retrieval in Sparse Matrices.* Neural Networks, 2:289–293, 1989.

E. R. Caianiello. *Outline of a theory of thought-processes and thinking machines.* Journal of Theoretical Biology, 1(2):204–235, 1961. ISSN 0022-5193. doi: https://doi.org/10.1016/0022-5193(61)90046-7. URL `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022519361900467`.

T. M. Cover. *Geometrical and Statistical Properties of Systems of Linear Inequalities with Applications in Pattern Recognition.* IEEE Transactions on Electronic Computers, EC-14(3):326–334, 1965.

George Cybenko. *Approximation by superpositions of a sigmoidal function.* Mathematics of control, signals and systems, 2(4):303–314, 1989.

Peter Dayan und Laurence F. Abbott. *Theoretical Neuroscience: Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems*, volume 15. MIT Press, 01 2001.

Andreas Dierks. *VidAs - Aufbau einer robusten, frei programmierbaren Maschine aus Assoziativmatrizen. Simulation und Hardwarelösung.* PhD thesis, Universität Hildesheim, 2005.

Andreas Dierks. *Der plumChip und seine Krypto-API - Beschreibung mit Beispielen*, 2019. URL `https://www.imbit.net/Schriften`.

Andreas Dierks, Hans-Joachim Bentz, Uwe Dobbratz, Elisabeth Ente, Oliver Festerling, Matthias Glockemann, Fabian Thomas Rosenschein, Mari Miyamoto, Detlef Romberger, Jan Weber, Jürgen Braun, und Günther Palm. *IT-Sicherheit mit Assoziativmatrizen*, 2021. URL `https://www.imbit.net/Schriften`.

Wulfram Gerstner und Werner M. Kistler. *Spiking Neuron Models: Single Neurons, Populations, Plasticity.* Cambridge University Press, 2002. doi: 10.1017/CBO9780511815706.

Michael Hagström. *Textrecherche in grossen Datenmengen auf der Basis spärlich codierter Assoziativmatrizen.* PhD thesis, Universität Hildesheim, 1996.

Moritz Helias und David Dahmen. *Statistical Field Theory for Neural Networks.* Springer International Publishing, Cham, 2020. ISBN 978-3-030-46444-8. doi: 10.1007/978-3-030-46444-8. URL `https://doi.org/10.1007/978-3-030-46444-8`.

Arun Vivian Holden. *Stochastic Fluctuations in Membrane Potential.* Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1976. ISBN 978-3-642-46345-7. doi: 10.1007/978-3-642-46345-7. URL `https://doi.org/10.1007/978-3-642-46345-7`.

J. J. Hopfield. *Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities.* Proceedings of the National Academy of Science, 79(8):2554–2558, apr 1982. doi: 10.1073/pnas.79.8.2554.

Stephen Cole Kleene. *Representation of events in nerve nets and finite automata.* In: Automata studies, Annals of mathematics studies, no. 34, pages 3–41. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.

S. Olafsson. *On the stability of neural networks with arbitrary weights.* Neural Computing & Applications, 4(1):2–9, Mar 1996. ISSN 1433-3058. doi: 10.1007/BF01413864. URL `https://doi.org/10.1007/BF01413864`.

Sean O'Rourke, Van Vu, und Ke Wang. *Eigenvectors of random matrices: A survey.* Journal of Combinatorial Theory, Series A, 144:361–442, 2016. ISSN 0097-3165. doi: https://doi.org/10.1016/j.jcta.2016.06.008. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0097316516300383. Fifty Years of the Journal of Combinatorial Theory.

Günther Palm. *On representation and approximation of nonlinear systems.* Biological Cybernetics, 34 (1):49–52, Sep 1979. ISSN 1432-0770. doi: 10.1007/BF00336857. URL https://doi.org/10.1007/BF00336857.

Günther Palm. *On associative memory.* Biological Cybernetics, 36(1):19–31, Feb 1980. ISSN 1432-0770. doi: 10.1007/BF00337019. URL https://doi.org/10.1007/BF00337019.

Günther Palm. *Towards a theory of cell assemblies.* Biological Cybernetics, 39(3):181–194, Jan 1981. ISSN 1432-0770. doi: 10.1007/BF00342771. URL https://doi.org/10.1007/BF00342771.

Günther Palm. *Neural Assemblies: An Alternative Approach to Artificial Intelligence.* Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1982. ISBN 978-3-642-81792-2. doi: 10.1007/978-3-642-81792-2. URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-81792-2.

Günther Palm. *Computing with Neural Networks.* Science, 235(4793):1227b–1228, 1987. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.235.4793.1227b. URL https://science.sciencemag.org/content/235/4793/1227b.

Günther Palm. *Neural associative memories and sparse coding.* Neural Networks, 37:165–171, 2013. ISSN 0893-6080. doi: https://doi.org/10.1016/j.neunet.2012.08.013. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0893608012002298. Twenty-fifth Anniversay Commemorative Issue.

Ian Parberry. *Circuit Complexity and Neural Networks.* MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1994. ISBN 0262161486.

Fabian Thomas Rosenschein. *Assoziative Systeme als Datenspeicher (Text storage and associative memories).* PhD thesis, Universität Hildesheim, 2012.

Hava T. Siegelmann. *Neural Networks and Analog Computation: Beyond the Turing Limit.* Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1999. ISBN 978-1-4612-0707-8. doi: 10.1007/978-1-4612-0707-8. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0707-8.

H. Sompolinsky, A. Crisanti, und H. J. Sommers. *Chaos in Random Neural Networks.* Phys. Rev. Lett., 61:259–262, Jul 1988. doi: 10.1103/PhysRevLett.61.259. URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.259.

K Steinbuch. *Die Lernmatrix.* Kybernetik, 1(1):36–45, 1996. ISSN 1432-0770. doi: 10.1007/BF00293853. URL https://doi.org/10.1007/BF00293853.

M. V. Tsodyks und M. V. Feigelman. *The Enhanced Storage Capacity in Neural Networks with Low Activity Level.* Europhysics Letters (EPL), 6(2):101–105, may 1988. doi: 10.1209/0295-5075/6/2/002. URL https://doi.org/10.1209/0295-5075/6/2/002.

C. van Vreeswijk und H. Sompolinsky. *Chaos in Neuronal Networks with Balanced Excitatory and Inhibitory Activity.* Science, 274(5293):1724–1726, 1996. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.274.5293.1724. URL https://science.sciencemag.org/content/274/5293/1724.

D. J. Willshaw, O. P. Buneman, und H. C. Longuet-Higgins. *Non-Holographic Associative Memory.* Nature, 222(5197):960–962, 1969. ISSN 1476-4687. doi: 10.1038/222960a0. URL https://doi.org/10.1038/222960a0.